Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

Folha 2: *Aplicações de funções vectoriais*

---

1. As parametrizações que se seguem representam um movimento (em metros) de uma partícula, em função do tempo (em segundos), ao longo de uma dada curva. Determine i) a posição dessa partícula nos instantes $t = 1$ seg. e $t = 3$ seg.; ii) a velocidade e aceleração desse movimento no instante $t = 1$ seg; iii) a recta tangente à curva associada a essa parametrização no ponto $r(1)$; iv) consoante a dimensão, determine a recta, ou plano, normal à direcção do movimento em $r(1)$.

   (a) $r(t) = (t\cos(t\pi), t\sin(\pi t)), \quad t \in [0, 3]$.
   (b) $r(t) = (3\sec(t/6), 2\tan(t/6)), \quad t \in [0, \pi[$.
   (c) $r(t) = (\cos(\frac{\pi t}{2}), \sin(\frac{\pi t}{2}), t), \quad t \in [0, 8]$.
   (d) $r(t) = (e^{-t}, t^2, \sqrt{t}), \quad t \in]0, 4]$.

2. Nos problemas que seguem, determine a equação do movimento, em função do tempo, sabendo que

   (a) a velocidade é $v(t) = (\sin 3t, 2\cos 3t)m/s$, e a posição inicial é $r(0) = (-1/3, 0)m$.
   (b) a aceleração é $a(t) = (t, 1 - t^2, e^{-t})m/s^2$, as velocidade e posição iniciais são $(1, 0, 1)m/s$ e $(0, 1, 1)m$, respectivamente.

3. Considere uma circunferência parametrizada por $b(t) = (\cos(t), \sin(t)), \ t \in [0, 2\pi]$. O movimento de um objecto que se desloca linearmente do centro para a periferia desta circunferência é assim descrito por
$$r(t) = tb(t).$$
   Determine e interprete o vector aceleração a que o objecto é sujeito durante este movimento.

4. Suponha que um objecto com a massa de 5 kilogramas é sujeito a uma força dependente do tempo, $F(t) = e^t\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ kilogramas metro por seg^2. Suponha adicionalmente que, no instante $t = 0$, o objecto se encontra no ponto $(0, 1, 1)$ metros e que a sua velocidade, nesse momento, é $v = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ metros por segundo. Indique a posição do objecto em função do tempo t.

5. Suponha que, sobre um dado objecto de massa $1/3kg$ actua a força $F(t) = (-\frac{\cos t}{3}, 3e^{3t})$ em cada instante t. Representando por $r(t)$ a posição desse objecto nesse instante, e sabendo que as posição e velocidade iniciais são, respectivamente, $(1, 1)$metros e $(1, 3)$ metros/ segundo, determine a lei deste movimento.

6. Um canhão, com uma inclinação θ em relação ao chão, é disparado numa planície plana. A velocidade da bola quando sai da boca do canhão é conhecida e vale s metros por segundo.

   (a) Desprezando a resistência do ar, encontre uma fórmula que descreva o alcance da bala do canhão, isto é, a distância a que a bola atinge o solo. Mostre que o alcance máximo da bola do canhão é obtido quando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(b) Suponha que a massa da bola do canhão é de 10 kilogramas e sofre uma força da resistência do ar de $0,01v$ Newtons, onde v é a velocidade em metros por segundo. A aceleração da gravidade é de $9,8$ metros por seg^2. Suponha adicionalmente que a velocidade inicial é de 100 metros por segundo. Encontre a fórmula para o deslocamento $r(t)$ da bola do canhão.

(c) Supondo que o ângulo de elevação é de $\pi/4$, estime o tempo gasto até que a bola do canhão atinja o chão.

7. Suponha que um objecto tem a posição $r(t) \in \mathbb{R}^3$ onde r é diferenciável e suponha também que $\|r(t)\| = c$, onde c é uma constante.

   (a) Justifique que esta condição não obriga a que $r(t)$ seja um vector constante.

   (b) Mostre que $r'(t) \cdot r(t) = 0$, ou seja, a velocidade é sempre perpendicular ao vector de posição do deslocamento.

8. Calcule o comprimento das seguintes curvas

   (a) *catenária* $y = \cosh x,\ z = 0$ e de $x = 0$ a $x = 1$.

   (b) *hélice circular* $r(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$, de $(a, 0, 0)$ a $(a, 0, 2\pi c)$, onde $a \neq 0$ e c são constantes reais.

   (c) *parábola semicúbica* $r(t) = (t, t^{\frac{3}{2}}, 2)$, de $(0, 0, 2)$ a $(4, 8, 2)$.

   (d) *hipociclóide* $r(t) = a\cos^3 t\mathbf{i} + a\sin^3 t\mathbf{j}$, onde $t \in [0, 2\pi]$ e $a \neq 0$.